RSSI, Vol. 04, No. 01, Décembre (2014) 35-40

Revue des Sciences et Sciences de l'Ingénieur

ISSN 2170-0737

Journal homepage :http://www.RSSI.lagh-univ.dz

# Produit d'Opérateurs de Toeplitz sur un Espaces Modèle

**Z.BENDAOUD, F.KORRICHI**

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées,
Université Amar Telidji de Laghouat.

*Corresponding author: f.korrichi@lagh-univ.dz*

***Résumé*** **: Dans cet article on étudie le produit des opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace modèle. En 2010, Sedlock [6] a étudié ce problème en montrant que le produit de deux opérateurs de Toeplitz tronqués est un opérateurs de Toeplitz tronqué si et seulement si les deux opérateurs appartiennent à une classe particulière appelée opérateur de Toeplitz tronqué du type $\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{D}$, on s'intéresse aussi à la description de C*-algèbre engendrée par l'opérateur de Toeplitz tronqué.**

***Mot-clés*** **: Espace modèle, Matrice de Toeplitz, Opérateurs de Toeplitz tronqués.**

***Abstract:*** **In this article, we study the product of truncated Toeplitz operators on truncated model space, in 2010, Sedlock [6] studied this problem by showing that the product of two Toeplitz operators is a truncated Toeplitz operators truncated if and only if the two operators belong to a particular class called truncated Toeplitz operator of type $\alpha$ where $\alpha \in \mathbb{D}$, we are also interested in the description of C* -algebra generated by Toeplitz operator truncated.**

***Keywords :*** **Model space, Toeplitz Matrix, Truncated Toeplitz operators.**

## 1-INTRODUCTION

Les opérateurs de Toeplitz sont les plus étudiés et bien connus dans la théorie des opérateurs sur l'espace de Hardy. Les opérateurs de déplacement à droite et à gauche (the shift and the backward shift) sont des exemples simples.

Le problème que nous allons étudier dans ce papier concernent la stabilité de la multiplication de deux opérateurs de Toeplitz et la commutativité du produit.

Pour les opérateurs de Toeplitz définis dans l'espace de Hardy, ce problème est complètement résolu par Brown et Halmos.

Récemment, Sarason a étudié ([**5**]) la compression de l'opérateur de Toeplitz sur l'espace modèle. Cet opérateur est appelé opérateur de Toeplitz tronqué. Les opérateurs de Toeplitz tronqués représentent une généralisation des matrices de Toeplitz classiques.

Bien que des cas particuliers de ces opérateurs sont apparus dans la littérature, la théorie générale a commencé dans [**5**] en 2007. A partir de ce moment, la théorie des opérateurs de Toeplitz tronquées devient un domaine de recherche intéressant, voir par exemple [**3**].

Concernant les opérateurs de Toeplitz tronqués, notre problème s'avère difficile à résoudre. En 2010, Sedlock [**6,7**] a étudié ce problème en montrant que le produit de deux opérateurs de

Toeplitz tronqués est un opérateurs de Toeplitz tronqué si et seulement si les deux opérateurs appartiennent à une classe particulière appelée opérateur de Toeplitz tronqué du type $\alpha$ .

On note par $\mathbb{D}$ le disque unité, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ le cercle unité du plan complexe $\mathbb{C}$, $dm := \dfrac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$ et $L^2(\mathbb{T}; dm)$ l'espace de Lebesgue usuel sur $\mathbb{T}$ .

L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ est l'espace des fonctions analytiques $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ sur le disque unité telle que la norme

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2 |d\zeta|$$

est finie.

D'après le théorème de Fatou (voir [1]) chaque fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$ admet une unique limite radiale:

$$f^*(\zeta) := \lim_{r \longrightarrow 1^-} f(r\zeta) m - p.partout, \zeta \in \mathbb{D}$$

Sur $\mathbb{T}$ l'espace de Hardy est défini par:

$$H^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}$$

muni de la norme de $L^2(\mathbb{T})$.

L'application:

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{T}) \\ & f & \longrightarrow & f^* \end{array}$$

est un isomorphisme isométrique.

$H^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \langle f^*, g^*\rangle_{H^2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} f^*(\zeta)\overline{g^*(\zeta)} dm(\zeta)$$

On note par $P$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D})$ sur $H^2(\mathbb{D})$.

$H^2(\mathbb{D})$ est un espace à noyau reproduisant. En effet, pour chaque $\lambda \in \mathbb{D}$ , l'application:

$$\begin{array}{rccc} \Phi_\lambda : & H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longrightarrow & \Phi_\lambda(f) = f(\lambda) \end{array}$$

est linéaire continue. Donc, il existe (d'aprés le théorème de représentation de Riesz ) une unique fonction $k_\lambda \in H^2(\mathbb{D})$ telle que $f(\lambda) = \langle f, k_\lambda\rangle$ pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$.

Le noyau reproduisant de $H^2(\mathbb{D})$ noté $k_\lambda$ est donné par la formule :

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z}, \qquad pour \quad z \in \mathbb{T}$$

Donc la projection orthogonale $P$ de $L^2(\mathbb{D})$ sur $H^2(\mathbb{D})$ est exprimée par:

$$P[f](\lambda) = \langle f, k_\lambda\rangle \text{ pour tout } f \in H^2(\mathbb{D}) \text{ et } \lambda \in \mathbb{D}$$

ou $\langle ., .\rangle$ désigne le produit scalaire sur $H^2(\mathbb{D})$

## 2-ESPACES MODELES

Une fonction $u \in H^2$ est dite intérieure si $|u(z)| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$.

Soit $S : H^2 \to H^2$ l'opérateur de déplacement à droite (shift operator) défini par:

$$S[f] = zf(z) \text{ pour } f \in H^2 \text{ et } z \in \mathbb{T}$$

Et soit $S^* : H^2 \to H^2$ l'adjoint de $S$ (the backward shift) défini par:

$$S^*[f](z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} \text{ pour } f \in H^2 \text{ et } z \in \mathbb{T}$$

D'aprés le théorème de Beurling, les sous espaces fermés non-nul de $H^2$ qui sont invariants par $S$ sont de la forme $uH^2$ pour une certaine fonction intérieure $u \in H^2$. Il s'ensuit que les sous espace fermés non nul de $H^2$, invariants par $S^*$ sont de la forme:

$$K_u^2 = H^2 \ominus uH^2$$

pour une certaine fonction intérieure $u \in H^2$ (voir [4])·

Le sous espace $K_u^2$ est appelé l'espace modèle correspondant à la fonction $u$.

**Définition 2.1** [4]

Si u est une fonction intérieure, l'espace modèle $K_u^2$ est l'ensemble des fonctions $f \in H^2$ telles que $f = u\overline{zg}$ presque partout sur pour une certaine fonction $g \in H^2$. Autrement dit, $K_u^2 = H^2 \bigcap u\overline{zH^2}$.

En effet, pour chaque $f \in H^2$, nous avons

$\langle f, uh\rangle = 0, \forall h \in H^2 \Leftrightarrow \langle uf, h\rangle = 0, \forall h \in H^2 \Leftrightarrow \overline{u}f \in \overline{zH^2}$

Puisque $|u| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$, alors $f \in (uH^2)^{\perp}$ si et seulement si $f \in u\overline{zH^2}$.

Pour chaque fonction intérieure $u$, l'espace modèle $K_u^2$ correspondant est un sous-espace fermé de $L^2$ et on note par $P_u$ la projection orthogonale de $L^2$ sur $K_u^2$.

Si $P$ est la projection de $L^2$ sur $H^2$, on note par $M_u$ et $M_{\overline{u}}$ la multiplication par $u$ et $\overline{u}$ respectivement alors $M_u P M_{\overline{u}}$ est la projection sur $uH^2$ et donc, la projection $P_u = P - M_u P M_{\overline{u}}$.

Comme dans le cas de $H^2$, chaque $K_u^2$ est un espace à noyau reproduisant et le noyau reproduisant est donné par :

$$k_\lambda^u(z) = P_u[k_\lambda](z) = \frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{1-\overline{\lambda}z}, \qquad (\lambda, z) \in \mathbb{D}\times\mathbb{T}$$

**Proposition 2.1**

Si $u(z) = z^n$ alors $K_u^2$ est tout simplement l'ensemble des polynômes de degré $n-1$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. C'est-à-dire:

$$K_u^2 = \{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1}z^{n-1}; a_0; a_1; \ldots a_n - 1 \in \mathbb{C}\}$$

Notons que $K_u^2$ est de dimension finie si $u$ est un produit de Blaschke d'ordre fini.

**Proposition 2.2**

Soit $b_\lambda(z) = \frac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}z}$

Si $u(z) = \prod_{i=1}^n b_{\lambda_i}(z)$ est un produit de Blaschke d'ordre fini avec des zéros deux à deux distincts $\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n$ , alors

$$K_u^2 = \left\{\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1}z^{n-1}}{(1-\overline{\lambda_1}z)(1-\overline{\lambda_2}z)\ldots(1-\overline{\lambda_n}z)}; a_0; a_1; \ldots a_n - 1 \in \mathbb{C}\right\}$$

Pour chaque fonction intérieure $u$, les compressions de $S$ et $S^*$ sur $K_u^2$ sont notées respectivement par $S_u$ et $S_u^*$.

**2-1.L'opérateur de conjugaison**

Soit $H$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$. Un opérateur de conjugaison sur $H$ est un opérateur $C : H \longrightarrow H$ vérifiant :

$i)\quad \langle Cx, Cy\rangle = \langle y, x\rangle$

$ii)\quad C^2 = Id_H$

Un opérateur $T$ défini sur $H$ est dit complexe - symétrique s'il existe un opérateur de conjugaison $C$ sur $H$ tel que $T = CTC^*$. Dans ce cas, on dit que $T$ est C-symétrique.

Chaque espace modèle $K_u^2$ admet un opérateur de conjugaison (voir [2])$C : K_u^2 \longrightarrow K_u^2$ défini par :

$$C[f](z) = u(z)\overline{zf(z)} \quad pour \quad chaque \quad f \in K_u^2 \quad et \quad z \in \mathbb{T} \tag{1}$$

Dans ce qui suit, l'image de chaque $f$ par la conjugaison $C$ définie dans la relation (1) est notée $\widetilde{f}$ c'est-à-dire $\widetilde{f} = C[f]$.

Nous rappelons ici quelques résultats concernant les noyaux reproduisant et l'opérateur de conjugaison.

Pour chaque $\lambda \in \mathbb{D}$, on a:

$$\widetilde{k_\lambda^u}(z) = \frac{u(z)-u(\lambda)}{z-\lambda}, (z \in \mathbb{T})$$

En particulier, si $u(\lambda) = 0$,

$$\widetilde{k_\lambda^u}(z) = \frac{u(z)}{z-\lambda}, \ (z \in \mathbb{T})$$

$\widetilde{f}(\lambda) = \langle \widetilde{k_\lambda^u}, f\rangle$, pour tout $f \in K_u^2$

## 3-OPERATEURS DE TOEPLITZ TRONQUES

**Définition 3.1[5]**

Soit $\varphi$ une fonction dans $L^\infty$, l'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\varphi$ sur $K_u^2$ est défini par:

$$A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f), \quad \text{pour chaque } f \in K_u^2$$

L'adjoint $(A_\varphi^u)^*$ de $A_\varphi^u$ est l'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\overline{\varphi}$

L'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués sur $K_u^2$ est noté par $\mathfrak{T}_u$

Les opérateurs de Toeplitz tronqués sur $K_u^2$ sont C-symétriques par rapport à la conjugaison $C$ .

Les opérateurs $S_u$ et $S_u^*$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole respectif $z$ et $\overline{z}$. Autrement dit, $S_u = A_z^u$ et $S_u^* = A_{\overline{z}}^u$.

**3-1.Matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué**

La matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué est définie par: $A = (a_{ij} = a_{i-j})_{1\le i,j\le n}$ ou les $a_i$ sont les coefficients de Fourier du symbole $\varphi$

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

**3-2.Les opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1**

Soient $H$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et $x, y \in H$ . On définit le produit tensoriel de $x$ et $y$ par:
$x \otimes y : z \in H \longrightarrow \langle z, y\rangle .x \in H$

Le produit tensoriel est un opérateur de rang 1 sur $H$.

**Théorème 3.1 (Sarason )[5]**

Pour $\lambda \in \mathbb{D}$,

i) les opérateurs $\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u$ et $k_\lambda^u \otimes \widetilde{k_\lambda^u}$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole respectif $\dfrac{u}{z-\lambda}$ et $\dfrac{\overline{u}}{\overline{z}-\overline{\lambda}}$.

ii) les opérateurs $\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u$ et $k_\lambda^u \otimes \widetilde{k_\lambda^u}$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1,

iii) Si $u$ admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point $\eta \in \mathbb{T}$ alors $k_\eta^u \otimes k_\eta^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de rang 1,

iv) Les seuls opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1 sont des multiples des opérateurs définis dans (1) et (2).

**Définition 3.2[6]**

Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$., on définit l'opérateur $S_u^\alpha$ par:

$$S_u^\alpha = S_u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} k_o^u \otimes \widetilde{k_o^u}$$

**3-2.Les opérateurs de Toeplitz tronqués du type $\alpha$**

En 2010, Sedlock a introduit la notion d'opérateur de Toeplitz tronqué du type $\alpha$ [6] qui est défini comme suit:

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. Un opérateurs de Toeplitz tronqués $A_\psi$ est dit de type $\alpha$ si et seulement s'il existe $\varphi \in K_u^2$ telle que:

$$\psi = \varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + c, \quad c \in \mathbb{C}$$

Avec la convention $1/0 = \infty$ et $1/\infty = 0$, si $A_\psi$ est du type $\alpha$ alors $A_\psi^*$ est du type $1/\overline{\alpha}$.

Et si $\alpha = 0$, on dit que $A_\psi$ est du type holomorphe. Si $\alpha = 1$, on dit que $A_\psi$ est du type anti-holomorphe.

On note par $\mathcal{B}_u^\alpha$ l'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués du type $\alpha$.

Dans [6,7], Sedlock a généralisé les résultats de Brown et Halmos pour répondre à la question: "Pour quel type de $\varphi$ et $\psi$ a-t-on $A_\varphi A_\psi$ est un opérateur de Toeplitz tronqué?". Nous rappelons ici les résultats de Sedlock.

**Théorème 3.2 (Sedlock) [6]**

Pour $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, on a:

i) $\mathcal{B}_u^\alpha = \{S_u^\alpha\}'$, le commutant de $S_u^\alpha$.

ii) $\mathcal{B}_u^\alpha$ est une algèbre commutative fermée.

iii) $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$ si et seulement si $A \in \mathcal{B}_u^{1/\overline{\alpha}}$.

iv) Si $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$ est inversible alors $A^{-1} \in \mathcal{B}_u^\alpha$.

v) Deux opérateurs de Toeplitz tronqués $A_\varphi$ et $A_\psi$ commutent si et seulement s'appartiennent à une même classe $\mathcal{B}_u^\alpha$ pour un certain $\alpha$, et dans ce cas, le produit $AB \in \mathcal{B}_u^\alpha$.

vi) Si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ alors $\mathcal{B}_u^{\alpha_1} \cap \mathcal{B}_u^{\alpha_2} = \mathbb{C}_\mathbb{I}$ ou $\mathbb{I}$ désigne l'opérateur identité sur $K_u^2$.

vii) Pour chaque $\alpha$, la classe est une sous-algèbre maximale contenue dans $\mathfrak{T}_u$.

**4-DEMONSTRATION DU THEOREME DE SEDLOCK PAR LA METHODE MATRICIELLE**

La méthode utilisée par Sedlock montre seulement l'existence de mais dans cette méthode, nous avons obtenu une formule explicite de $\alpha$ dans le cas ou $u(z) = z^n$.

Rappelons que pour $u(z) = z^n$ et $\varphi \in L^2$, la famille $\mathrm{A} = \{1, z, z^2, \ldots, z^n\}$ est une base orthonormée de $K_u^2$ et la matrice de $A_\varphi$ relativement à la base $\mathrm{A}$ n'est autre qu'une matrice de Toeplitz usuelle formée par les coefficients de Fourier de la fonction $\varphi$.

**Théorème 4.1**

Soient $A$ et $B$ deux matrices de Toeplitz. Le produit $A \times B$ est une matrice de Toeplitz si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

i) $A$ et $B$ sont toutes les deux triangulaires inférieures ou triangulaires supérieures.

ii) $A$ ou $B$ est un multiple de l'identité.

iii) Il existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $A$ et $B$ sont de la forme:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha a_{n-1} & \cdots & \alpha a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & \alpha a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & \alpha b_{n-1} & \cdots & \alpha b_1 \\ b_1 & b_0 & \cdots & \alpha b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

Avec $\alpha = \dfrac{a_{-n+k}}{a_k} \qquad 0 \leq k \leq n-1.$

**Preuve :**

Notons $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}=(a_{i-j})_{1\leq i,j\leq n}$, $B=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}=(b_{i-j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $A\times B=C=(c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

Par définition,

$$c_{ij}=\sum_{k=0}^{n-1}a_{ik}b_{kj}$$

$C$ est une matrice de Toeplitz si et seulement si:

$$c_{ij}=c_{i-j}=\sum_{k=0}^{n-1}a_{i-k}b_{k-j} \quad (2)$$

Nous distinguons deux cas pour la relation (3).

1) Pour $i=j$, nous avons

$$c_0=\sum_{k=0}^{n-1}a_{i-k}b_{k-i} \text{ pour } i=0,1,...,n-1.$$

C'est-à-dire

$$c_0=\sum_{k=0}^{n-1}a_{i-k}b_{k-i}=\sum_{k=0}^{n-1}a_{i-k+1}b_{k-j-1} \text{ pour } i=0,1,...,n-2. \quad (3)$$

De la relation (4), nous avons la série d'égalité:

$$a_{i-n+1}b_{n-i-1}=a_{i+1}b_{-i-1} \quad (4)$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} a_{-n+1}b_{n-1} &= a_1b_{-1}\\ a_{-n+2}b_{n-2} &= a_2b_{-2}\\ \vdots & \vdots \quad \vdots\\ a_{-1}b_1 &= a_{n-1}b_{-n+1}\end{cases}$$

2) Pour $i\neq j$, soit $l=i-j$ c'est-à-dire $j=i-l$ avec $|l|=1,...,n-2$, nous avons

$$c_{i-j}=c_l=\sum_{k=0}^{n-1}a_{i-k}b_{k-i+l}$$

Remarquons que pour chaque $i$ et $l$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{n-1}a_{i-k}b_{k-i+l}=\sum_{k=0}^{n-1}a_{i-k+1}b_{k-1-i+l}$$

C'est-à-dire

$$a_{i-n+1}b_{n-1-i+l}=a_{i+1}b_{-1-i+l} \quad (5)$$

En variant $l$ dans la relation (6), nous avons obtenus les systèmes:

$$\begin{cases} a_2b_{-1} &= a_{-n+2}b_{n-1}\\ a_2b_{-2} &= a_{-n+2}b_{n-2}\\ \vdots & \vdots \quad \vdots\\ a_2b_{-n+1} &= a_{-n+2}b_1\end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1b_{-1} &= a_{-n+1}b_{n-1}\\ a_1b_{-2} &= a_{-n+1}b_{n-2}\\ \vdots & \vdots \quad \vdots\\ a_1b_{-n+1} &= a_{-n+1}b_1\end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n-1}b_{-1} &= a_{-1}b_{n-1}\\ a_{-n+2}b_{n-2} &= a_2b_{n-2}\\ \vdots & \vdots \quad \vdots\\ a_{n-1}b_{-n+1} &= a_{-1}b_1\end{cases}$$

Donc, pour chaque $i\in\{0,1,...,n\}$, nous avons

$$\begin{cases} a_ib_{-1} &= a_{-n+i}b_{n-1}\\ a_ib_{-2} &= a_{-n+i}b_{n-2}\\ \vdots & \vdots \quad \vdots\\ a_ib_{-n+1} &= a_{-n+i}b_1\end{cases} \quad (6)$$

S'il existe $a_{i_0}\neq 0$ alors on pose $\beta=\frac{a_{-n+i_0}}{a_{i_0}}$ et nous avons

$$b_{-1}=\beta b_{n-1},\quad b_{-2}=\beta b_{n-2},...,b_{-n+1}=\beta b_1$$

Et nous avons deux alternatives sur $\beta$.

a) Si $\beta=0$ alors $b_{-1}=b_{-2}=...=b_{-n+1}=0$ et en revenant dans (7) , nous avons:

i) $a_{-n+1}=0$ pour tous $i\in\{0,1,...,n\}$, ou

ii) $b_1=b_2=...=b_n=0$

En résumé, si $\beta=0$ alors $A$ et $B$ sont toutes les deux triangulaires inférieures ou $B$ est un multiple de l'identité.

b) Si $\beta\neq 0$ alors on a:

$b_{-1}=\beta b_{n-1},\quad b_{-2}=\beta b_{n-2},...,b_{-n+1}=\beta b_1$

Nous avons encore deux cas :

i) S'il existe un $s$ tel que $b_{n-s}\neq 0$ alors

$a_ib_{-s}=a_{-n+i}b_{n-s}$

C'est-à-dire

$\beta a_ib_{n-s}=a_{-n+i}b_{n-s}$

D'où

$a_{-n+i}=\beta a_i$

Donc $A$ et $B$ sont de la même forme que la condition 3 du théorème.

ii) Si $b_1=b_2=...=b_n=0$ alors $B$ est un multiple de l'identité.

## 5- $C^*$ALGEBRE ENGENDREE PAR $S_u$

Dans cette partie, nous montrons que si $u(z)=z^n$ ou $u(z)=b_\lambda^n(z),\lambda\in\mathbb{D}$ alors la $C^*$ algèbre engendrée par $S_u$ n'est autre que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

**Théorème 5.1**

Si $u(z) = z^n$ alors $C^*(S_u) = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. De plus, si $A$ désigne la matrice de $S_u$ par rapport à la base orthogonale $\mathrm{A} = \{1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}\}$ de $K_u^2$ alors :

$e_{ij} = A^{*(n-1-i}A^{n-1}A^{*j}$ pour $0 \leq i, j \leq n-1$

ou $(e_{ij})$ désigne la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $A^* = \overline{A^t}$.

**Preuve :**

Soit $(f_k)_k$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Il suffit de remarquer que:

$$e_{ij}(f_k) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & si \quad k \neq j \\ f_i & si \quad k = j \end{cases}$$

et

$$A^{*l}(f_k) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & si \quad k < l \\ f_{k-l} & si \quad k \geqslant l \end{cases}$$

et

$$A^m(f_k) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & si \quad k \neq 0 \\ f_m & si \quad k = 0 \end{cases}$$

Le théorème précédent a pour corollaire le résultat suivant, qui montre qu'on peut avoir le même résultat si la fonction intérieure $u$ est un produit de Blaschke d'ordre $n$ avec un seul zéro répété n-fois.

**Corollaire 5.1**

Si $u(z) = \left(\frac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}z}\right)^n$ alors $C^*(S_u) = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. (avec les mêmes notations que le théorème précédent).

**Preuve :**

Il suffit de remarquer que la transformation de Moebus définie par:

$$\phi_\lambda : z \mapsto \phi_\lambda(z) = \frac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}}z$$

est une transformation conforme qui envoie 0 à $z$ et vis versa.

**REFERENCES**

[1] L. P.Duren, “Theory of Hp spaces“, Academic Press, New York, (1970).

[2] S.R. Garcia, “the backward shift and Toeplitz kernels. J.Operator Theory“, 54(2), (2005), 239–250.

[3] S.R. Garcia, W. T. Ross et W. R. Wogen , “Spatial isomorphisms of algebras of truncated Toeplitz operators“. *Indiana Univ. Math.* J, 59, (2010), 1971–2000.

[4] N. Nikolski, “Operators, functions, and systems , an easy reading“, volume 2. *Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society*, (2002).

[5] D. Sarason, “Algebraic properties of truncated Toeplitz operators, *Operators and Matrices*“, 1(2), (2007), 491491–526.

[6] N. Sedlock, “Properties of truncated Toeplitz operators“, Thèse de doctorat, Washington University in St. Louis, 2010.

[7] N. Sedlock, “*Algebras of truncated Toeplitz operators*, Operators And Matrices“, 51(2), 309–326, 2011.