ESTIMATION DES PROVISIONS TECHNIQUES PAR LES METHODES DETERMINISTES ET LES MODELES STOCHASTIQUES
CAS EMPIRIQUE DU MODELE LOG NORMAL

Résumé

L'assurance est, par définition, une couverture pour l'individu permettant de le prémunir contre d'éventuels événements improbables. L'entreprise d'assurance s'engage dans le cadre d'un contrat d'assurance à indemniser sa clientèle. À fin de faire face à ses engagements, elle doit disposer d'un niveau nécessaire de provisions techniques. Le calcul de ces dernières se base sur la prévision d'une charge totale pour une année donnée. L'évaluation peut se faire par les méthodes réglementaires, plus précisément la méthode dossier par dossier dans la réglementation Algérienne, ou les méthodes actuarielles. Ce travail s'appuie tout d'abord sur la vérification pratique des différentes hypothèses des méthodes pour établir leur adéquation aux données, puis à comparer les différentes méthodes de provisionnement déterministes d'une part (Chain Ladder et London Chain), stochastiques (Mack et Log Normale) d'autre part. Qui nous permettront de quantifier le montant des provisions à détenir mais aussi l'incertitude liée à l'estimation.

Mots clés : Provisionnement, Best estimate, Chain ladder, Londonchain, modèle de Mack, modèle Log-normal**.**

Introduction :

L'assurance est un système qui permet de prémunir un individu, une association ou une entreprise contre les conséquences financières et économiques liées à la survenance d'un risque particulier. L'entreprise d'assurance s'engage, dans le cadre d'un contrat d'assurance, à fournir à l'assuré une prestation en cas de réalisation d'un risque, moyennant le paiement d'une prime.

Afin d'honorer ses engagements la compagnie d'assurance se doit d'être solvable, elle doit disposer d'un certain niveau de provisions techniques. Le calcul de ces dernières s'effectue par branches d'activité (automobile, dommages aux biens, et responsabilité civile). Ces provisions sont liées à la technique même de l'assurance et imposées par la réglementation. Nous portons notre intérêt sur l’évaluation des provisions pour sinistres à payer qui concerne les sinistres déjà survenu à la date d’inventaire.

Selon la réglementation algérienne, leur évaluation se fait par la méthode dossier par dossier en procédant à des évaluations distinctes pour les sinistres matériels et les sinistres corporels. Après accord de l’administration de contrôle, la compagnie peut avoir recours aux trois méthodes (la méthode des coûts moyens, méthode des cadences de règlements ou méthode de blocage de primes) et en retenir l’évaluation la plus élevée.

Les techniques utilisées dans le monde entier ont connu un progrès remarquable, le calcul des provisions des sinistres à payer s’est souvent limité à la méthode déterministe« Chain Ladder ».La démarche de provisionnement a connu certains changements, par le passage des méthodes déterministes aux méthodes stochastiques, c’est dans ce contexte que nous avons développé notre travail.

La notion de triangles de développement et les méthodes d’estimation classiques, Chain-Ladder et London Chain, ont toujours permis d’estimer le montant des provisions. Les limites de ces deux méthodes ont conduit les chercheurs à considérer d’autres techniques stochastiques de provisionnement. Plusieurs actuaires ont tenté de justifier les méthodes déterministes dans les années 1990, en particulier Thomas MACK qui a justifié cette méthode d’un point de vue probabiliste. En 1993 il a présenté la version stochastique de la méthode de Chain-Ladder, en y ajoutant des indicateurs de risque de prédiction qui permettent d’estimer les erreurs commises lors de l’évaluation des réserves.

Le modèle de Mack est un modèle non paramétrique, au sens où aucune hypothèse de distribution n’est émise sur les composants du triangle. Ceci dit il existe un modèle où les règlements du triangle de développement sont supposés suivre une loi log-normale, c'est-à-dire que les log-incréments suivent une loi normale. Cette supposition permet d’estimer le bas du triangle pour qu’en suite on arrive à quantifier le montant des provisions requis, il s’agit de « la régression log normale », elle fait partie des modèles factoriels. Dans ce travail nous allons mettre en avant ce modèle. Nous avons tenté d’appliquer le modèle au triangle des règlements des sinistres de la branche automobile de la compagnie algérienne « CAAT », afin d’évaluer le montant des provisions mais principalement pour comprendre le modèle.

1. Présentation des méthodes déterministes :

Elles reposent sur l'hypothèse de stabilité du délai s'écoulant entre la survenance d'un sinistre et les règlements. Quel que soit l'exercice de survenance, en absence d'inflation, de changement de structure de portefeuille, des garanties des contrats…, si toutes ces hypothèses sont vérifiées sur une période suffisamment longue (minimum 5 ans), les méthodes déterministes peuvent être un premier outil intéressant pour prévoir la charge finale[1].

1.1. Méthode de Chain Ladder :

La méthode de Chain Ladder est la plus couramment utilisée pour sa simplicité de mise en œuvre, elle s'applique à des triangles de paiements cumulés (C_{ij}). Elle est basée sur l'utilisation des facteurs de développements notés f_{ij} , ces facteurs seront utilisés pour prévoir la partie inconnue du tableau triangulaire. Ils sont évalués sur les données historiques et ne dépendent que de l'année de déroulement.

Le but de cette méthode est d'estimer, à partir des observations faites sur le passé, la valeur finale des montants des paiements cumulés relatifs à une certaine année de survenance.

Cette méthode dans son cadre standard consiste à supposer que les ,(C_{ij}) tel que $j = 1,.....n$, sont liés par un modèle de type de la forme :[2]

$$C_{i,j+1} = f_j C_{i,j} \qquad pour \qquad i, j = 1,.....n$$

Les coefficients f_j peuvent être estimés à l'aide des observations, par le rapport des totaux relatifs aux éléments communs de deux colonnes successives, c'est à dire :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{ij}}$$

A partir de ces coefficients de passage, il est alors possible d'obtenir une prévision des montants cumulés futurs correspondant aux valeurs du triangle inferieur des règlements. Une fois que le triangle de paiement est complété, il est possible de connaitre une estimation des réserves pour chaque année i, qui est la différence entre ce que l'on devra payer au total $C_{i,n+1-i}$ et ce que l'on a déjà payé .$C_{i,n}$

[1]Michel Denuit « mathématique de l'assurance non vie » tome 2, ed economica 2005, page 344.
[2]OP.CIT, Michel Denuit, "Mathématiques de l'assurance non-vie Tome 2", page 345

La réserve pour l'année d'accident ***i*** **(**c'est-à-dire ce qui reste à payer pour les sinistres survenus en l'année ***i*** **)**, est donc définie par :

$$R_i = C_{i,n} - C_{i,n+1-i}$$

Et enfin l'estimation du montant total de la provision, notée $\hat{R}$ est obtenu en sommant les provisions de chaque année de survenance :

(R_1 Étant nul) $$\hat{R} = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i$$

La méthode de Chain Ladder repose sur deux principales hypothèses[1] :

H_1 : Les années de survenance sont indépendantes entre elles ;

H_2 : Les années de développement sont les variables explicatives du comportement des sinistres futurs ;

1.1. La variante de Chain Ladder « LondonChain » :

London Chain fait partie des fonctions dites autorégressives, elle est la moins utilisée. Elle permet d'étudier les résultats obtenus lorsqu'on ne se contraint plus à avoir une relation linéaire entre (C_{ij}) et $(C_{i,j+1})$ et que $(C_{i,j+1})$ est une fonction affine de (C_{ij}).

Introduite par Benjamin et Eagles en 1986 pour le calcul des réserves au Lloyd's, cette méthode suppose l'existence, pour j fixé, de deux paramètres α_j et f_j tel que[2] :

$$C_{i,j+1} = f_j C_{ij} + \alpha_j$$

Pour : $i = 0,......, n - j - 1$

La méthode London Chain suppose elle aussi que les points , $(C_{ij}, C_{i,j+1})_{i=0...n}$ soient sensiblement alignés sur une même droite, mais elle ne suppose plus qu'elle passe par l'origine[3].

2. Présentation des méthodes stochastiques :

2.1 Modèle de Mack :

Non paramétrique, au sens où aucune hypothèse de distribution n'est faite sur les composants du triangle, conditionnel au sens où les

[1]OPCIT, Michel Denuit, « Mathématiques de l'assurance non-vie », page 345.
[2] Christian Partrat « Provisionnement technique en assurance non vie », economica 2007, page 49.
[3], Idem Michel Denuit, "Mathématiques de l'assurance non-vie » , page 349.

espérances sont prises connaissant les réalisations du triangle supérieur, ce modèle s'applique à des montants cumulés[1].

Sous les deux premières hypothèses de la méthode déterministe, Mack(1993) a montré que le modèle stochastique fournit exactement le même montant des réserves que la méthode standard de Chain Ladder[2]. La troisième hypothèse quant à elle suppose l'existence de paramètres de variance $\sigma_0^2.......\sigma_{j-1}^2 > 0$ Tel que :

$$V(C_{i,j+1}/C_{i1},....,C_{in}) = \sigma_J^2 C_{ij}$$

Il est possible de calculer une erreur de prédiction à partir des estimateurs de Chain Ladder, pour ce faire on s'intéressera à la distance moyenne entre l'estimateur $\hat{C}_{i,n}$ et la vraie valeur $C_{i,n}$.Elle est classiquement mesurée par l'écart quadratique moyen conditionnel. Quant à l'erreur de prédiction totale des provisions elle est estimé selon la formule suivant :

$$\hat{MSEP}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^{n} \left\{ \hat{MSEP}(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,n} \left(\sum_{k=i+1}^{n} \hat{C}_{k,n} \right) \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2 \sum_{h=1}^{n-j} C_{hj}} \right\}$$

On peut aussi donner l'erreur standard $sep(\hat{R}_i) = \sqrt{MSEP(\hat{R}i)}$, qui est prise comme mesure alternative d'incertitude.

2.2. Le modèle factoriel -log normal- :

Ce modèle stochastique d'analyse des provisions de sinistre a été introduit par KREMER en 1982 et a donné lieu, ensuite à de nombreux développements et applications[3], dans ce modèle on supposera que, pour $i, j = 1,....,n$, les incréments[4] (X_{ij}) nécessairement>0 sont distribués selon la loi log normale $LogN(m_{ij}, \sigma^2)$, où σ^2 est un paramètre de dispersion et $m_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$

Soit $Y_{ij} = \ln X_{i,j}$ la variable appelée log incrément, suit une loi normale $N(m_{ij}, \sigma^2)$ alors:

$$Y_{i,j} = m_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{i,j}$$

---

[1] Idem Christian Partrat « provisionnement en assurance non vie » , page 115.
[2] Idem Michel Denuit « Mathématiques de l'assurance non vie »,page 360.
[3] Christian Partrat « provisionnement en assurance non vie » page 167
[4]Les montants de paiement non cumulés, du triangle de liquidation.

Il est équivalent d'écrire :

$$E(Y_{i,j}) = m_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

Les erreurs $\varepsilon_{i,j}$ étant i.i.d, distribuées selon la loi normale $N(0\ ,\sigma^2)$

Où : $\mu_{i,j} = E(X_{i,j}) = e^{m_{ij}+\frac{\sigma^2}{2}}$ et $V(X_{i,j}) = e^{2m_{ij}+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$

Dans cette modélisation où année et délai sont des variables qualitatives, il a été nécessaire d'introduire les contrainte $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, La régression log normale est donc un modèle linéaire normal appliqué aux log-incréments du triangle supérieur des paiements :

- ✓ $Y' = (Y_{00}, Y, ...Y_{0n}, Y_{10}, Y_{20}, ...Y_{1,n-1}, ...y_{0n})$ est le vecteur des log-incréments du triangle pris ligne par ligne ;
- ✓ M est la matrice de régression. Elle correspond à la matrice jacobiénne[1] de la transformation $m : \xi \to m(\xi) = m_{i,j}$ définie par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_{i,j}}{\partial \mu} = 1 \\ \dfrac{\partial m_{i,j}}{\alpha_k} = 1 & \text{Si i=k, 0 sinon} \\ \dfrac{\partial m_{i,j}}{\partial \beta_l} = 1 & \text{Si j=l, 0 sinon} \end{cases}$$

La matrice des variables explicatives est composé par l'intercepte et par les indicatrices des années de souscription $i = 1,....n$ et des délais de régalement $j = 1,....n$ . .

- ✓ $\xi' = (\mu, \alpha_1, ...\alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n)$ est le vecteur des paramètres de régression d'ordre $p = (2n+1)$
- ✓ $\varepsilon' = (\varepsilon_{00}, \varepsilon_{01}, ..., \varepsilon_{0n})$ est le vecteur associé des erreurs.

Les paramètres du modèle log normal sont généralement estimés par la méthode de maximum de vraisemblance, On notera l'estimateur de maximum de vraisemblance de ξ comme suite :

$$\hat{\xi} = (M'M)^{-1}M'Y$$

En ce qui concerne σ^2 l'estimateur de maximum de vraisemblance et l'estimateur sans biais sont respectivement :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \qquad \text{Et} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{v-p}\sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

---

[1] Hélène Compain «Analyse du risque de provisionnement non-vie dans le cadre de la réforme Solvabilité II » 2009/2010, page 23.

V : nombre d'observations ; P : nombre de paramètres.

Par invariance du maximum de vraisemblance on pour calculer l'estimation des provisions, on a tout d'abord :

$$\hat{\mu}_{ij} = E(x_{ij}) = e^{\hat{\mu}+\hat{\alpha}_i+\hat{\beta}_j+\frac{s^2}{2}} = e^{\hat{m}_{ij}++\frac{s^2}{2}}$$

Le montant des provisions par année de survenance $\hat{R}_i$ est obtenu, en sommant le bas du triangle estimé. La provision totale est :

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i$$

Remarque :

Notons que $\hat{m}_{ij}$ est un estimateur sans biais, cependant le passage à l'exponentielle introduit un biais dans l'estimation de $\hat{\mu}_{ij}$, $E(x_{ij})$, ,donc dans celle de $\hat{E}(R)$, Verral et Dorray ont proposé des estimateurs sans biais de μ_{ij} , ces estimateurs sont basés sur la fonction introduite par finney1940, défini par[1] :

$$g_r(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k(r+2k)}{r(r+2)...(r+2k)} \left(\frac{r}{r+1}\right)^k \frac{u^k}{k!}$$

L'estimateur s'écrit :

$$\tilde{\mu}_{ij} = e^{\hat{m}_{ij}} g_r \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - b'_{ij} (M'M)^{-1} b_{ij} \right] s^2 \right\}$$

3. Présentation des données :

Dans ce qui suit, nous appliquerons les différentes méthodes entamées au paravent, sur les données de la compagnie algérienne des assurances et du transport CAAT au capital de 11 490 000 000da, détenu entièrement par l'Etat Algérien.

En prenant les données de la branche automobile de la compagnie Algérienne des assurances et du transport CAAT, qui s'étale de l'année 2002 à 2012, on remarque le triangle de développement suivant :

Tableau 1 : Triangle des paiements non cumulés

	Année de développement										
année De surv	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	457839860	429183904	181401558	139671968	87242921	64882626	46994990	36166533	23000000	20000000	16000000
2003	671537689	508491565	239507562	167220515	117595612	71930852	42214741	30644364	21388364	18000000	
2004	858562086	651665753	286846644	178093114	124697288	84346730	48225102	28382632	26809129		
2005	1123371387	766625135	289297104	192111097	135459534	66523343	50602855	35114640			

en DA

Comme on peut le voir sur notre tableau de paiement, la durée de liquidation s'étale sur 11 ans. C'est à dire que l'indemnisation des sinistres survenus en 2002 peut prendre 11 ans pour couvrir le risque global. Ces différents montants sont notés pour chaque année de développement.

Sur ce triangle on note pour les sinistres survenus en 2002, un montant de 457839860 DA réglé la même année, et un règlement de 429 183904 DA en 2003.C'est-à-dire une année après la survenance des sinistres. Pour les années qui suivent on observe successivement les montants de 181401558DA, 139671968DA, 87242921DA en 2004,2005, 2006. Il en est ainsi pour les années restantes.

On remarque également sur ce tableau que les règlements de la première année de développement sont plus importants que les règlements des années qui suivent, ceci s'explique par le fait que la compagnie d'assurance règle une proportion considérable des sinistres à charge durant cette première année.

4. Estimation des provisions :

4.1. Méthode de Chain Ladder :

La méthode de Chain Ladder nécessite dans la détermination des provisions, le calcul des facteurs de paiements, dont on a parlé dans la définition de la méthode, pour ce faire on a procédé à la mise en place d'un tableau représentant le triangle des règlements cumulés.

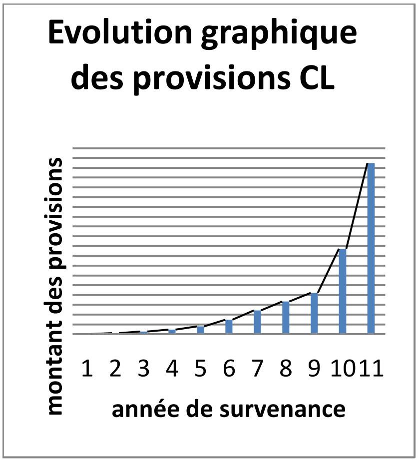
L'estimation du montant des provisions est basée sur les montants à prévoir pour chaque année de survenance, il faut donc compléter la matrice du tableau cumulé après calcul des coefficients Fij.

Le tableau suivant fait ressortir le résultat des provisions de Chain Ladder, ou l'on retrouve, les montants des derniers règlements, et les charges ultimes qui reflètent ce que la compagnie d'assurance doit régler au total.

Tableau 2 : Montants des derniers règlements ainsi que les charges ultimes.

derniers règlements	charges ultimes
1 502 384 360,00	1 502 384 360,00
1 888 531 264,00	1 908 860 124,45
2 287 628 478,00	2 338 584 761,30
2 659 105 095,00	2 753 186 739,32
2 997 812 607,00	3 153 921 779,19
3 920 648 147,00	4 218 606 286,74
4 368 920 546,00	4 854 432 705,18
3 985 513 372,00	4 655 307 473,24
3 145 964 854,00	3 990 003 385,92
3 704 295 507,00	5 449 572 748,49
2 145 515 517,00	5 640 679 808,83

Source : Etabli par nous même à partir du tableau du triangle complété.



Source : Etabli par nous même à partir du tableau de détermination des provisions CL.

On remarque que pour la première année de survenance le montant des provisions est nul, on suppose qu'il n'y a pas de provisions à déterminer pour cette année. Effectivement cette année-là est dite 'année close', tous les sinistres survenus durant cette année ont été réglés.

Comme on peut le constater le montant des provisions s'accroit d'année en année, ceci explique le fait que la compagnie d'assurance doit prendre ses précautions à l'égard des nouveaux sinistres qui surviennent chaque année. Plus les charges de ceux qui n'ont pas été réglés en totalité, communément appelés 'les sinistres ouverts '. La méthode Chain Ladder en fin d'année 2012 nous donne une provision de sinistre à payer, estimée à **7 859 220 425,65 DA**.

4.2. Méthode de London Chain :

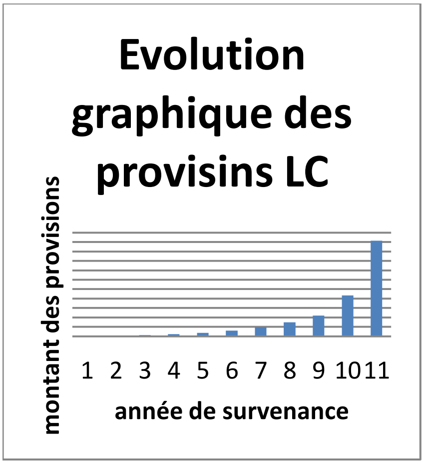
La méthode London Chain est la moins utilisée, mais nous permet d'étudier les résultats obtenus lorsqu'on ne se contraint plus à avoir une relation linéaire entre $(C_{ij}, C_{i,j+1})$

.Nous avons pris le soin d'appliquer une régression linéaire des moindres carrés ordinaires, entre chaque deux colonne de notre triangle de règlements cumulés. Une fois les paramètres de la méthode estimés, le triangle de liquidation peut être compléter, pour qu'en suite nous arrivons aux résultats des provisions, comme on peut le voir sur le tableau qui suit :

Tableau 3 : Montants des derniers règlements ainsi que les charges ultimes.

derniers règlements	charges ultimes
1 502 384 360,00	1 502 384 360,00
1 888 531 264,00	1 908 860 124,43
2 287 628 478,00	2 328 360 120,19
2 659 105 095,00	2 729 651 329,15
2 997 812 607,00	3 103 425 088,31
3 920 648 147,00	4 097 989 439,98
4 368 920 546,00	4 656 739 194,22
3 985 513 372,00	4 431 211 774,42
3 145 964 854,00	3 806 451 708,80
3 704 295 507,00	5 008 892 804,55
2 145 515 517,00	5 193 871 070,32

Source : Etabli par nous même à partir du tableau du triangle complété.



Source : Etabli par nos mêmes à partir du tableau de détermination des provisions LC.

Le graphe que l'on a, est le même qu'on a obtenu avec la méthode Chain Ladder, où la première année est également supposée close et la provision est nulle, avec une évolution assez remarquable.

La provision estimée par la méthode de London Chain s'évalue à **6 161 517 267,38 DA,** largement inferieure à celle de Chain Ladder.

4.3. Modèle de Mack :

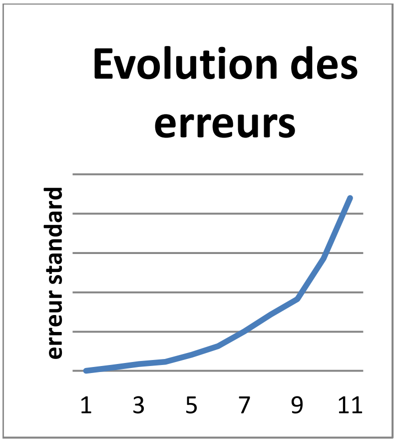
Comme on a pu le voir avec la méthode de Chain Ladder, nous avons calculé les facteurs de développement, mais aussi un deuxième paramètre du modèle de Mack, σ^2 , les valeurs de la variance pour chaque année de développement, ce paramètre nous informe sur la variabilité du triangle, celui-ci aura tendance a diminuer d'année en année du fait que les premières années, son calcul est basé sur des montants important, et ces montants seront de moins en moins remarquable, années après années jusqu'à leur annulation à la dernière année, ou tous règlement est considéré clos pour tous les sinistres.

Le modèle de Mack nous permet également de mesurer l'incertitude qui réside dans l'estimation des provisions, elle est classiquement représentée par l'erreur quadratique moyenne MSEP.

Tableau 4 : Les montants de l'erreur quadratique moyenne MSEP et des provisions.

$MSEP(\hat{R}_i)$	$\hat{R}_i$	$sep(\hat{R}_i) / \hat{R}_I$
-	0	-
1,73889E+13	20328860,45	20,5%
7,62129E+13	50956283,3	17,1%
1,3689E+14	94081644,32	12,4%
4,2436E+14	156109172,2	13,2%
9,9225E+14	297958139,7	10,6%
2,52004E+15	485512159,2	10,3%
5,15524E+15	669794101,2	10,7%
8,37225E+15	844038531,9	10,9%
2,0449E+16	1745277241	8,2%
4,84E+16	3495164292	6,3%

Source : Etabli par nous même à partir du triangle des paiements cumulés.



Source : Etabli par nous même d'après le tableau des résultats.

…reur par rapport au montant des réserves $sep(\hat{R}_i) / \hat{R}_i$, pour la première année de survenance est plus importante que les autres années, effectivement pour cette année le montant des réserves est plus faible que les autres réserves R2… R10. La provision totale, elle s'élève à 7 859 220 425,65DA équivalente à celle obtenu avec la méthode de Chain ladder, l'information cruciale qu'on obtient avec le modèle stochastique est celle du montant de l'erreur standard qui s'élève, pour l'ensemble des années, à 653 200 000DAce qui représente 8.3% de la provision totale.

On ce qui concerne l'évolution des erreurs, elle croit continuellement, on remarque que les dernières années la courbe croit d'une façon exponentielle. Plus on avance dans les années de développement plus l'erreur de prédiction s'élève, effectivement plus les années de règlements sont récentes, plus on est appelé à affronter des sinistres dont on dispose peu ou pas d'information, ce qui implique plus d'incertitude.

4.4. Modèle Log-normal

4.4.1. Estimation des paramètres de régression :

Le modèle suppose que les incréments $X_{ij} \sim LogN(m_{ij}, \sigma^2)$, et , $Y_{ij} = \ln X_{i,j}$ d'où $Y_{ij} \sim N(m_{ij}, \sigma^2)$

On a : $m_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$, et σ^2 est un paramètre de dispersion.

L'estimation des paramètres de régression (μ, α_i, β_j) nécessite la création de la matrice de régression M, issue de la transformation du triangle de liquidation (triangle non cumulé), pour une variable réponse $Y_{ij} = \ln X_{i,j}$,et les deux variables i (année de survenance) et j (année de développement), on arrive à une matrice de dimension (66,21) où les modalités des variables i et j sont traduits en variables auxiliaires binaires 0, ou 1.

On procède à une régression linéaire sur Eviews, où on obtient les valeurs des estimateurs de maximum de vraisemblance. Ces paramètres nous permettront de calculer les valeurs prévues $Y_{ij} = \ln X_{ij}$, par le modèle soit ;

$$\hat{Y}_{i,j} = E(Y_{ij}) = \hat{m}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j$$

Et les résidus bruts : $e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij}$

Les résultats de la régression linéaire sur Eviews nous donnent des informations sur le coefficient de détermination qui vaut $R^2_{ajust} = 0.988508$, ainsi que la P-value du test de Fisher largement inférieure à 0.000001. Rappelons que R^2_{ajust} est le coefficient de détermination qui traduit la qualité de l'ajustement, plus le coefficient s'approche de la valeur de 1 plus on estime que le modèle est satisfaisant, il en est de même pour la p-value de Fisher, si cette dernière est inférieure à 0.05, le test est significative. Les résultats pour les 5premières valeurs sont sur le tableau qui suit :

Tableau 5 : Valeurs prévues et Résidus bruts

Observés	Prévues	Résidus bruts
19,94203	20,36871	-0,42667997
19,8773961	20,129058	-0,251661934
19,0162237	19,15826	-0,142036316
18,7548071	18,713604	0,041203146
18,284207	18,281586	0,002620981

4.4.2. Validation du modèle :

✓ Validation graphique des résidus :

L'analyse individuelle des résidus passe par les résidus studentisés ou de Student : $e_i^* = \frac{e_i}{s\sqrt{1-h_i}}$

L'analyse des résidus nous permis de constater des valeurs dites atypiques qui correspondent aux observations pour les quelles $\left|e_i^{(s)}\right| \rangle 2$ .Quant au graphe des résidus, nous ne constatons aucune structure non aléatoire, ce premier test validé on passe au test d'indépendance des résidus.

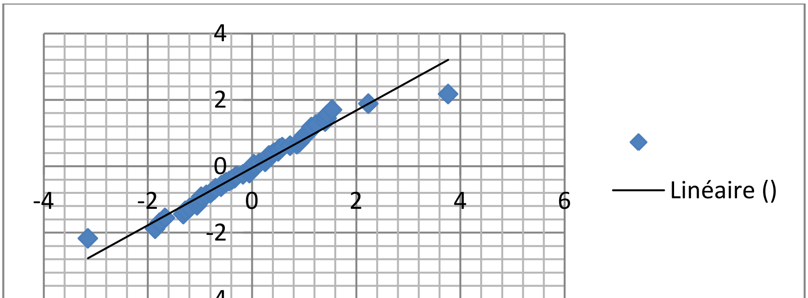
✓ Test d'indépendance des résidus :

Pour la première année de survenance on observe la suite :1,1,1,0,1,1,1,0,1,0, le nombre de séquence est de $S_0 = 6$, pour $n_0 = 11$, on se réfère à la table[1] du test up and down. Après avoir pris en considération les probabilités, nous avons conclu à une région critique $w_0 = \{s \leq 4, ou, s \geq 10\}$ au seuil de 0.0416 ~ 4.16%. S=6 n'appartient pas à la région critique w, cela nous permet de maintenir l'hypothèse d'indépendance.

✓ Test de normalité QQ plot :

Sous l'hypothèse d'indépendance, on s'assure que $\frac{e_i}{\sqrt{1-h_i}}$, Suivent une loi normale, nous avons tracé le graphe quantile-quantile, et nous en sommes arrivé au résultat suivant :

Graphe : graphe de normalité Quantile-quantile



[1] Jean Di
DEKKEF

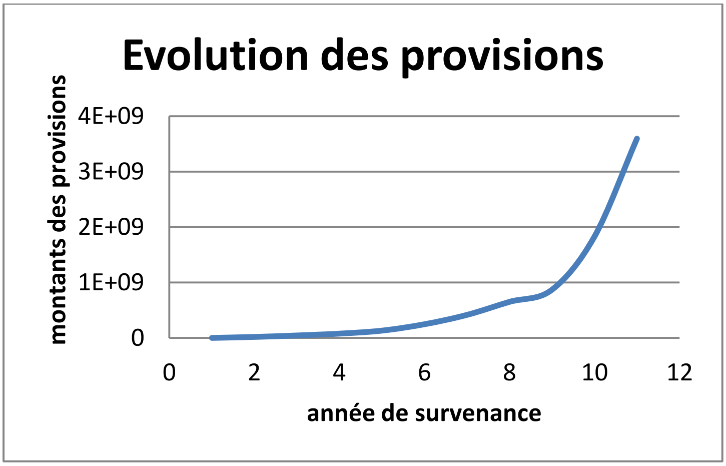
Le graphique QQ plot[1] de normalité des résidus, qu'à part les résidus extrêmes 0.0368, 0.4997 et -0.4267 correspondant aux cellules influentes, les points sont sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine, on peut dire que la distribution des résidus suit probablement une loi de distribution gaussienne normalisée.

4.4.3. Estimation des provisions par la régression Log-normale :

L'estimation des provisions est notre principale intérêt dans ce travail, pour ce faire nous mettons en avant les valeurs auxquelles nous sommes parvenus avec le modèle log normal. A l'aide des estimateurs obtenus par une régression linaire et suivant la formule suivant :

$$\hat{\mu}_{ij} = E(x_{ij}) = e^{\hat{\mu}+\hat{\alpha}_i+\hat{\beta}_j+\frac{s^2}{2}} = e^{\hat{m}_{ij}++\frac{s^2}{2}}$$

Graphe : Evolution graphique des provisions -Log-Normal-



[1]Le **diag**
graphiqu … à un
modèle t

Le montant des provisions issu de la régression log-normale, s'élève à 7 866 600 302.25 DA, une différence de 7 379 877 DA par rapport à la méthode de Chain Ladder.

Afin de vérifier notre supposition de départ, qui repose sur la normalité des log-incréments du triangle de liquidation. Nous avons testé la normalité des estimateurs $\hat{m}_{ij}$. Le test de Kolmogorov Smirnov appliqué aux valeurs de $\hat{m}_{ij}$ a révélé que :

$$p_{\alpha=5\%} \leq p(\hat{m}_{ij}) \leq p_{\alpha=1\%}$$

Nous avons conclu que l'hypothèse de normalité est acceptée au seuil de 1%.

Remarque :

L'application des estimateurs sans biais, proposés par Verral et Dorray, n'a pas était chose facile, nous avons effectué une programmation sur Matlab, nous avons rencontré des difficultés pour parvenir à fournir les résultats des estimateurs. La programmation nous a permis de confirmer les résultats obtenus au départ avec le modèle log-normal, et a abouti à un nouveau montant des provisions de l'ordre de 350 616 000 000 DA, on remarque que ce montant est largement supérieur à la provision Chain Ladder. Pour constituer une provision technique à elle seule, ce montant s'avère trop important.

Conclusion :

L'application des méthodes déterministes est basée sur les facteurs de développement. L'achèvement des étapes de calcul nous a permis d'apporter une première approche sur l'évaluation des provisions techniques, s'élevant à 7 859 220 425.65 DA, par la suite nos recherches se sont étalées sur la partie stochastique de Chain Ladder, nommée le modèle de Mack, l'estimation du modèle révèle le même niveau des provisions à constituer.

Quant au modèle log-normal, nous avons vérifié le modèle par les différents tests appliqués aux résidus, ainsi que la normalité de la distribution des log-incréments suite au test de Kolmogorov Smirnov. Ce modèle tend à surestimer la provision, une différence de l'ordre de 7 379 877 DA est enregistrée par rapport à la méthode Chain Ladder.

L'application des nouveaux estimateurs qui corrigent le biais de l'exponentielle, ont aboutis à des résultats irréaliste, jusqu'à 350 000 000 000 DA, ce qui semble être une somme colossale, notons que, dans la majorité du temps on se réfère aux résultats obtenus dés le départ c'est à dire les résultats qui s'approche de la valeur estimé de Chain Ladder.

Le modèle log normal, est un modèle qui ne peut s'appliquer à tous les nombres réels, mais aux nombres positifs seulement, dans le cas de nos données brutes nous ne rencontrons pas ce problème, mais parfois le triangle de liquidation peut contenir des valeurs négatives, dans certains tableaux nets de recours, ce qui peut sembler étrange pour un paiement, cela s'explique par le fait que certaines sommes peuvent être réglées puis récupérées à la suite d'un recours.

Parmi toutes les méthodes que nous avons vu, nous ne pouvons dire la quelle est préférable à l'autre, le choix d'une méthode dépend avant tout de son adéquation aux données. Le choix d'une méthode de provisionnement est délicat, il n'existe pas à priori une méthode applicable à toutes les compagnies d'assurance, chaque compagnie a sa propre politique de gestion des sinistres, il est donc utile de comparer régulièrement les différentes méthodes et les affronter à la réalité à posteriori.

Bibliographie :

- BONNEFOY (C), DEVICTOR (B) , *calcul stochastique de provisions techniques en assurance non vie* , promotion 2007.
- COMPAIN (H), *Analyse du risque de provisionnement non-vie dans le cadre de la réforme Solvabilité II* , l'Institut des Actuaires, Paris, 18 novembre 2010.
- COUILBAUT (F), CONSTANT (E), *Les grands principes de l'assurance* , 10 éme Ed L'argus de l'assurance, Paris, 2005.
- DENUIT (M), CHARPENTIER (A), *mathématique de l'assurance non vie* , tome 1, édition economica 2004.
- DENUIT (M), CHARPENTIER(A), *mathématique de l'assurance non vie*, tome 2, édition economica 2005.
- DUTANG (C), *Etude des marches d'assurance non-vie à l'aide d'équilibres de Nash et de modèles de risques avec dépendance*, l'Université Claude Bernard Lyon I, Laboratoire Science Actuarielle Financière, 2012.

- GIBBONS (JD), *non parametric statistical inference,* fourth edition, A DEKKER series of textbooks and monographs . The university of Alabama.
- GOURIEROUX (C), *Statistique de l'assurance*, Ed Economica, Paris, 1999.
- HAMI (S), *Les modèles DFA : présentation utilité et application,* Institut de Science Financière et l'Assurances pour l'obtention du Diplôme d'ACTUAIRE de l'Université de LYON.
- LUZI (M), *Assurance AssuranceIARD , interprétation des chiffres*, Edition economica.
- MACK (T), *Distribution-free calculation of standard error of Chain Ladder reserve estimates*, ASTIN Bulletin 23, 213-225, Munich 1993.
- MORLAY (F), *Risk management et assurance*, Ed Economica, Paris, 2006.
- PARTRAT (C), LECOEUR (E), NESSI (JM), NISIPASU (E), *Provisionnement technique en assurance non-vie , Perspectives actuarielles modernes,* economica edition 2007.
- PARTRAT (C), BESSON (JL), *assurance non vie (modélisation, simulation)*, édition économica 2005.
- SAUSER (C), GROISNE (M), MILHAUD (X),*Méthodes statistiques en assurance non vie Méthodes statistiques pour la finance et l'assurance,*Projet Etienne Marceau,ISFA - Décembre 2007
- ROSE (N), *Provisionnement en assurance non-vie : Utilisation de modèles paramétriques censurés*, Institut de Statistique de l'Université Pierre et Marie Curie, promotion 2009.