Sciences & Technologie A – N°42, Décembre (2015), pp. 15-22

LA METHODE COMBINATOIRE (S) POUR LA CONSTRUCTION DE QUELQUES TYPES DE PLANS EN BLOCS INCOMPLETS PARTIELLEMENT EQUILIBRES ET LE R-PACKAGE COMBINS ASSOCIE

IMANE REZGUI[1], Z. GHERIBI-AOULMI[1] ET MOHAMED LAIB[2]

1Département de Mathématiques, Université des frères Mentouri, Algérie.
2Faculté de Mathématiques, USTHB Alger, Algérie

Reçu le 17/01/2013– Accepté le 27/07/2015

Résumé

La configuration des plans d'expérience en blocs incomplets partiellement équilibrés ($PBIPE$) a toujours été un problème malgré l'existence de plusieurs méthodes de construction. La méthode à partir de schémas d'association accommodée de la méthode combinatoire (s) très maniable, sont reprises pour fournir une série de plans en blocs partiellement équilibrés. En outre, un R- package *CombinS* a été développé pour rendre accessible et applicable ces méthodes de construction qui se distinguent par le nombre (m) de classes associées $m= 2,\dots,5$ *ou* 7. L'exécution de chaque fonction de *CombinS* offre la configuration et les paramètres des plans ($PBIPE$) associés à ces méthodes.

Mots clés: *Plan en blocs incomplets partiellement équilibrés, Schéma d'association, Méthode Combinatoire (s).*

Abstract

The configuration of partially balanced incomplete block ($PBIB$) designs has always been a problem although the existence of several methods of construction. The method from the association schemes accommodated by the Combinatory method (s) very easy to use, are included to provide a series of partially balanced incomplete block (PBIB) designs. In addition, a R-package *CombinS* was then developed to make these construction methods accessible and applicable that differ in the number m of associated classes $m = 2,\dots, 5$ *or* 7. The execution of each function of *CombinS* provides the configuration and the parameters of the PBIB designs associated with these methods.

Keywords: *, Partially balanced incomplete block design, association scheme, Combinatory methods.*

ملخص

تكوين تصاميم التجارب الناقصة المتوازنة جزئيا ج.م.ن.ت) كان دائما مشكلة على الرغم من وجود عدة طرق . الطريقة بدءا من أنماط التجمع محكمة بالطريقة التوفيقية (s) – السهلة المنال - متخذة لتقديم سلسلة من تصاميم التجارب الناقصة المتوازنة جزئي . بالإضافة إلى ذلك، تم تطوير حزمة برنامج "R" المسماة "CombinS" لتسهيل تطبيق طرق البناء المتمايزة بالعدد "n=2,…,5,7" عدد أقسام أنماط التجمع). تنفيذ كل دالة يعطي التشكيل والإعدادات للتصاميم المرفقة بالطرق .

كلمات مفاتيح : تصاميم التجارب الناقصة المتوازنة جزئيا. أنماط التجمع. الطريقة التوفيقية (S).

Introduction

La construction des plans d'expériences numériques continue à susciter la curiosité des scientifiques. Parmi les diverses méthodes de construction de ces plans, les plans classiques qui satisfont certaines propriétés combinatoires peuvent être utilisés comme plans de base (par exemple [2]); ceci a fortement motivé notre travail. En effet, dans notre papier, nous proposons une série de plans en blocs incomplets partiellement équilibrés construits à partir d'une méthode combinatoire dite "Méthode Combinatoire (s)" agencée à des schémas d'association, rendant ainsi leur construction très aisée. Nous développons un R-package "CombinS" pour l'obtention facile de la configuration de chacun de ces plans. L'utilisation de l'algorithme $RBIBD - UD$ [2] permet d'obtenir aisément des plans numériques uniformes.

Description de la méthode Combinatoire (s) [5] :

Soit $v = nl$ traitements rangés dans un tableau de n lignes et l colonnes comme suit :

a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1l}
a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2j}	$\dots$	a_{2l}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{il}
....	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_{n1}	a_{n2}	$\dots$	a_{nj}	$\dots$	a_{nl}

Considérons s traitements différents de la même ligne i $(2 \leq s \leq l)$ et associons les à s autres traitements d'une autre ligne i' $(i \neq i')$, en respectant la correspondance entre les traitements a_{ij} et $a_{i'j}$. Juxtaposons les $2s$ traitements dans un même bloc et faisons toutes les combinaisons possibles, nous obtenons alors un plan en $PBIPE$ de taille $k = 2s$ dont le nombre de classes associées dépend du s choisi.

Rappelons quelques définitions :

Définition 1 : Un schéma d'association divisible en groupes [1] est un arrangement de $v = nl$ $(l \geq 2, n \geq 2)$ traitements dans un tableau de n lignes et l colonnes, tel que pour un traitement α:

i. Les traitements premiers associés à α sont les autres traitements de la même ligne que α $(n_1 = l - 1)$.
ii. Les traitements deuxièmes associés à α sont les traitements restants (n_2= $(n-1)l$).

Un plan divisible en groupes est un $PBIPE$ basé sur un schéma d'association divisible en groupes [1].

Définition 2 : Un schéma d'association rectangulaire [4] est un arrangement de $v = nl$ $(l \geq 2, n \geq 2)$ traitements dans un tableau de n lignes et l colonnes, tel que pour un traitement α:

i. Les traitements premiers associés à α sont les autres traitements de la même ligne que α (n_1=$l - 1$).
ii. Les traitements deuxièmes associés à α sont les autres traitements de la même colonne que α (n_2= $n-1$).
iii. Les traitements troisièmes associés à α sont les traitements restants (n_3= $(l-1)$ $(n-1)$).

Un plan rectangulaire est un $PBIPE$ basé sur un schéma d'association rectangulaire.

Définition 3 : Un schéma d'association divisible en groupes emboités [1] est un arrangement de $v = w\,nl$ ($w \geq 2$, $l \geq 2$, $n \geq 2$) traitements dans w tableaux de n lignes et l colonnes chacun, tel que pour un traitement α :

i. Les traitements premiers associés à α sont les autres traitements de la même ligne que α du même tableau $(n_1 = l - 1)$.
ii. Les traitements deuxièmes associés à α sont les traitements restants du même tableau (n_2= $(n-1)\,l$).
iii. Les traitements troisièmes associés à α sont les traitements restants des autres tableaux (n_3 = $(w-1)nl$).

Un plan divisible en groupes emboités est un $PBIPE$ basé sur un schéma d'association divisible en groupes emboités [1].

Définition 4 : Un schéma d'association rectangulaire à angles droits (4) [4] est un arrangement de $v = 2nl$ $(l \geq 2, n \geq 2)$ traitements dans deux tableaux de n lignes et l colonnes chacun, tel que pour un traitement α:

i. Les traitements premiers associés à α sont les autres traitements de la même ligne que α du même tableau (n_1= $l-1$).
ii. Les traitements deuxièmes associés à α sont les autres traitements de la même colonne que α du même tableau (n_2= $n-1$).
iii. Les traitements troisièmes associés à α sont les traitements restants du même tableau (n_3= $(l-1)$ $(n-1)$).
iv. Les traitements quatrièmes associés à α sont les traitements restants de l'autre tableau (n_4,= nl).

Définition 5 : Un schéma d'association rectangulaire à angles droits (5) [4] est un arrangement de $v = 2nl$ $(l \geq 2, n \geq 2)$ traitements dans deux tableaux de n lignes et l colonnes chacun, tel que pour un traitement α :

i. Les traitements premiers associés à α sont les autres traitements de la même ligne que α du même tableau (n_1= $l-1$).
ii. Les traitements deuxièmes associés à α sont les autres traitements de la même colonne que α du même tableau (n_2= $n-1$).

iii. Les traitements troisièmes associés à α sont les traitements restants du même tableau (n_3= $(l-1)\ (n-1)$).
iv. Les traitements quatrièmes associés à α sont les traitements de la même ligne que α de l'autre tableau (n_4= l).
v. Les traitements cinquièmes associés à α sont les traitements restants de l'autre tableau (n_5= $(n-1)l$).

Définition 6 : Un schéma d'association rectangulaire à angles droits (7) [5] est un arrangement de $v = 2nl\ (l \geq 2, n \geq 2)$ traitements dans deux tableaux de n lignes et l colonnes chacun, tel que pour un traitement α :

i. Les traitements premiers associés à α sont les autres traitements de la même ligne que α du même tableau (n_1= $l-1$).
ii. Les traitements deuxièmes associés à α sont les autres traitements de la même colonne que α du même tableau (n_2= $n-1$).
iii. Les traitements troisièmes associés à α sont les traitements restants du même tableau (n_3= $(l-1)\ (n-1)$).
iv. Le traitement quatrième associé à α est l'unique traitement qui se trouve à la même ligne et la même colonne de α de l'autre tableau ($n_4 = l-1$).
v. Les traitements cinquièmes associés à α sont les traitements de la même ligne que α de l'autre tableau et qui sont différents du traitement quatrième associé de α (n_5= $l - 1$).
vi. Les traitements sixièmes associés à α sont les traitements de la même colonne que α de l'autre tableau et qui sont différents du traitement quatrième associé de α ($n_6 = n - 1$).
vii. Les traitements septièmes associés à α sont les traitements restants de l'autre tableau (n_7= $(n-1)(l-1)$).

Un plan rectangulaire à angles droits $PBIPE_m$ (m = 4, 5 et 7) est un $PBIPE$ basé sur un schéma d'association rectangulaire à angles droits (m) [5].

1. Construction des PBIBE utilisant la méthode Combinatoire (s)

2.1. Les plans divisibles en groupes

Soient $v = nl$ traitements rangés dans un tableau de n lignes et l colonnes. On applique la méthode Combinatoire (s) avec $s = l$ à ce tableau, on obtient un plan divisible en groupes à deux classes associées de paramètres suivants :

$$v = nl, \quad b = n\left(\frac{n-1}{2}\right), \quad r = \lambda_1 = (n-1),$$
$$k = 2l, \quad \lambda_2 = 1.$$

Démonstration 1 Voir démonstration du théorème 1 dans [2] en posant $s = l$.

1.2. Les plans rectangulaires :

Soient $v = nl$ traitements rangés dans un tableau de n lignes et l colonnes. On applique la méthode Combinatoire (s) avec s choisi dans $\{2, \dots, l-1\}$ à ce tableau, on obtient un plan rectangulaire à trois classes associées de paramètres suivants :

$$v = nl, \quad b = n\frac{(n-1)C_s^l}{2}, \quad r = (n-1)C_{s-1}^{l-1},$$
$$k = 2s, \quad \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2},$$
$$\lambda_2 = C_{s-1}^{l-1}, \quad \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2}.$$

Démonstration 2 Voir démonstration du théorème 1 dans [2]

1.3. Les plans divisibles en groupe emboités

Soient $v = 2nl$ traitements rangés dans deux tableaux de n lignes et l colonnes chacun. On applique la mï¿½thode combinatoire (s) avec $s = l$ à chaque tableau. L'ensemble de tous les blocs donne un plan divisible en groupes emboités à trois classes associées de paramètres suivants :

$$v = 2nl, \quad b = n(n-1), \quad r = (n-1),$$
$$k = 2l, \quad \lambda_1 = (n-1), \quad \lambda_2 = 1,$$
$$\lambda_3 = 0.$$

Démonstration 3 Voir la Remarque 3 dans [5].

1.4. Les plans rectangulaires à angles droits PBIPE4

1.4.1. Première méthode de construction

Soient $v = 2nl$ traitements rangés dans deux tableaux de n lignes et l colonnes chacun. On applique la méthode combinatoire (s) avec s choisi dans $\{2, \dots, l-1\}$ à chaque tableau. L'ensemble de tous les blocs nous donne un plan rectangulaire à angles droits *PBIPE₄* à quatre classes associées de paramètres suivants :

$$v = 2nl, \quad b = n(n-1)C_s^l, \quad r = (n-1)C_{s-1}^{l-1},$$
$$k = 2s, \quad \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2},$$
$$\lambda_2 = C_{s-1}^{l-1}, \quad \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2}, \quad \lambda_4 = 0.$$

Démonstration 4 Voir la Proposition 1 dans [5].

1.4.2. Deuxième méthode de construction

Soient $v = 2nl$ traitements rangés dans deux tableaux de n lignes et l colonnes chacun. Soit $C_j^{(g)} = \left(a_{1j}^{(g)}, a_{2j}^{(g)}, \dots, a_{nj}^{(g)}\right)'$ la $j^{ème}$ colonne du $g^{ème}$, tableau $g \in \{1,2\}$. On définie $C_j^{(g)1} = C_j$. pour $h = 1$ et $C_j^{(g)h} = \left(a_{hj}^{(g)}, a_{(h+1)j}^{(g)}, \dots, a_{nj}^{(g)}, a_{1j}^{(g)}, \dots, a_{(h-1)j}^{(g)}\right)'$ pour $h = 2, 3, \dots, n$ $(g \in \{1,2\})$. On applique la méthode combinatoire (s) avec s choisi dans $\{3, \dots, l+1\}$ à chaque tableau de le forme $C_j^{(g)h} \cup A^{(g')}$ $(g' \neq g \in \{1,2\})$ pour $j = 1, \dots, l, h = 1, \dots, n\ et\ g \in \{1,2\}$ et on considère uniquement les combinaisons de s traitements contenant une composante de la colonne $C^{(g)h}$. L'ensemble de tous les blocs donne un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_4$ à quatre classes associées de paramètres :

$$v = 2nl, \quad b = ln^2(n-1)C_{s-1}^l,$$
$$r = s\,n(n-1)C_{s-1}^l, \quad k = 2s,$$

$\lambda_1 = ln(n-1)C_{s-3}^{l-2}$, $\lambda_2 = sn\, C_{s-1}^{l}$,
$\lambda_3 = nlC_{s-3}^{l-2}$, $\lambda_4 = 4(n-1)C_{s-2}^{l-1}$.

Démonstration 5 Les valeurs de v et k sont évidentes

- r : Pour chaque traitement $a_{ij_0}^{g}$ du tableau A^{g} ($g \in \{1,2\}$), nous avons :
  - Dans un tableau $C_{j0}^{(g)h} \cup A^{(g')}$ ($g' \neq g$), appliquant la procédure avec les autres éléments de la même ligne. Il y a C_{s-1}^{l} possibilités, chacune étant répétée $(n-1)$ fois. Avec les n permutations$(h = 1, \dots, n)$, alors on a : $n(n-1)C_{s-1}^{l}$ apparitions répétées elles-mêmes n fois. Donc pour $C_{j_0}^{(g)h} \cup A^{(g')}$ ($g' \neq g$) on a $n(n-1)C_{s-1}^{l}$ répétitions de $a_{ij_0}^{(g)}$.
  - Dans un tableau $A^{(g)} \cup C_{j}^{(g')h}$ ($g' \neq g$), $j = 1, \dots, l$ et $h = 1, \dots, n$, appliquant la procédure avec les autres éléments de la même ligne. Il y a C_{s-2}^{l-1} possibilités, chacune étant répétée $(n-1)$ fois. Avec les n permutations$(h = 1, \dots, n)$, alors on a : $n(n-1)C\_(s-1)\^(l)$ apparitions répétées elles-mêmes n fois. Donc pour un tableau $A^{(g)} \cup C_{j}^{(g')h}$ $(g' \neq g), j = 1, \dots, l$ on a, $n(n-1)C_{s-2}^{l-1}$ répétition de $a_{ij_0}^{(g)}$. Considérons tous les tableaux $A^{(g)} \cup C_{j}^{(g')h}$ ($g' \neq g$), $j = 1, \dots, l$; alors on : $ln(n-1)C_{s-2}^{l-1}$ répétitions de a_{ij_0}.

Ainsi : $r = n\,(n-1)[\,C_{s-1}^{l} + lC_{s-2}^{l-1}] = sn(n-1)C_{s-1}^{l}$.

- λ_1 : Considérons deux traitements $a_{ij_0}^{(g)}$ et $a_{ij_0'}^{(g)}$ du tableau $A^{(g)}$ ($g = 1,2$ et $j_0 \neq j_0'$), ils apparaissent ensemble $(n-1)C_{s-3}^{l-2}$ fois avec les autres $l-2$ éléments de la même ligne i des tableaux de la forme $A^{(g)} \cup C_{j}^{(g')h}$ ($g' \neq g$), et ceci pour chaque tableau. Avec les n permutations, nous obtenons $n(n-1)C_{s-3}^{l-2}$ fois ou les deux traitements apparaissent ensemble. Considérant tous les tableaux $A^{(g)}$ $C_{j}^{(g')h}$ pour $j = 1, \dots, l$; alors on a, $ln(n-1)C_{s-3}^{l-2}$ fois ou les deux traitements $a_{ij_0}^{(g)}$ et $a_{ij_0'}^{(g)}$ apparaissent ensemble.
- λ_2 : Considérons deux traitements $a_{ij_0}^{(g)}$ et $a_{i'j_0}^{(g)}$ du tableau $A^{(g)}$($g = 1,2$ et $i \neq i'$) , on a:
  - Dans un tableau $A^{(g)} \cup C_{j}^{(g')h}$ ($g' \neq g$) : les deux traitements apparaissent ensemble C_{s-2}^{l-1} fois. Avec les n permutations ($h = 1, \dots, n$) ils apparaissent ensemble nC_{s-2}^{l-1} fois. Considérons tous les tableaux de la forme $A^{(g)} \cup C_{j}^{(g')h}$ ($g' \neq g$) pour$j = 1, \dots, l$, ils apparaissent ensemble lnC_{s-2}^{l-1} fois.
  - Dans le tableau $A^{(g)} \cup C_{j}^{(g')h}$ ($g' \neq g$): les deux traitements apparaissent ensemble C_{s-1}^{l} fois. Avec les n permutations ($h = 1, \dots, n$) ils apparaissent ensemble nC_{s-1}^{l} fois.

  Au total $\lambda 2 = n[lC_{s-2}^{l-1} + C_{s-1}^{l}] = sn\, C_{s-1}^{l}$.
- λ_3 : Considérons deux traitements $a_{ij_0}^{(g)}$ et $a_{i'j_0'}^{(g)}$ du tableau $A^{(g)}(g = 1,2, i \neq i'$ and $j_0 \neq j_0')$, ils apparaissent ensemble C_{s-3}^{l-2} fois pour chaque tableau de la forme $A^{(g)} \cup C_{j}^{(g')h}$ ($g' \neq g$). Avec les n permutations ($h = 1, \dots, n$) ils apparaissent ensemble nC_{s-3}^{l-2} fois. Considérons tous les tableaux $A^{(g)} \cup C_{j}^{(g')h}$ ($g' \neq g$) pour $j = 1, \dots, l$, alors les deux traitements $a_{ij_0}^{(g)}$ et $a_{i'j_0'}^{(g)}$ apparaissent ensemble lnC_{s-3}^{l-2} fois.
- λ_4 : Considérons deux traitements $a_{ij}^{(g)}$ et $a_{i'j'}^{(g')}$ des tableaux $A^{(g)} et\, A^{(g')}$ respectivement ($g, g' = 1,2$):
  - Si $i = i'$, d'une part pour le tableau $A^{(g)} \cup C_{j}^{(g')h}$ ($g' \neq g$) et $h = 1$ les deux traitements apparaissent ensemble $(n-1)C_{s-2}^{l-1}$ fois. Et pour le tableau $C_{j}^{(g)h} \cup A^{(g')}$ ($g' \neq g$) et $h = 1$ ils apparaissent aussi ensemble $(n-1)C_{s-2}^{l-1}$ fois, ainsi ils apparaissent ensemble $2(n-1)C_{s-2}^{l-1}$ fois.
  D'autre part, pour $h = 2, \dots, n$, les deux traitements apparaissent ensemble C_{s-2}^{l-1} fois pour le tableau de la forme $A^{(g)} \cup C_{j}^{(g')h}$ et C_{s-2}^{l-1} fois pour le tableau de la forme $C_{j}^{(g)h} \cup A^{(g')}$, donc ils apparaissent ensemble $2C_{s-2}^{l-1}$ pour une valeur de h. Considérons toutes les valeurs de h ($h = 2, \dots, n$), nous obtenons $2(n-1)C_{s-2}^{l-1}$ fois ou les deux traitements apparaissent ensemble.
  Au total $\lambda_4 = 2(n-1)C_{s-2}^{l-1} + 2(n-1)C_{s-2}^{l-1} = 4(n-1)C_{s-2}^{l-1}$.
  - Si $i \neq i'$ alors les deux traitements apparaissent ensemble C_{s-2}^{l-1} fois pour le tableau de la forme$A^{(g)} \cup C_{j}^{(g')h}$ ($g' \neq g$) et apparaissent ensemble C_{s-2}^{l-1} fois pour le tableau de la forme $C_{j}^{(g)h} \cup A^{(g')}$ ($g' \neq g$) pour $h = 1$, alors ils apparaissent ensemble $2C_{s-2}^{l-1}$. Pour $h = 2, \dots, n$, parmi les $(n-1)$ permutations du vecteur $C_{j}^{(g)h}$, et pour une valeur donnée de h, le traitement

$a_{i'j'}^{(g')}$ sera à la même ligne que $a_{ij}^{(g)}$; alors les deux traitements apparaissent ensemble $(n-1)C_{s-2}^{l-1}$ fois, et pour les permutations restantes, les deux traitements apparaissent ensemble C_{s-2}^{l-1}fois. Pour $h=2,\dots,n$, parmi ces $n-1$ permutations, pour une certaine permutation du vecteur $C_j^{(g)}$ et une valeur donnée de h, le traitement $a_{ij}^{(g)}$ sera à la même ligne que $a_{i'j'}^{(g')}$; alors les deux traitements apparaissent ensemble $(n-1)C_{s-2}^{l-1}$ fois, et pour les valeurs restantes, les deux traitements apparaissent ensemble C_{s-2}^{l-1} fois.
Au total $\lambda_4 = 2C_{s-2}^{l-1} + (n-1)C_{s-2}^{l-1} + (n-2)C_{s-2}^{l-1} + (n-1)C_{s-2}^{l-1} + (n-2)C_{s-2}^{l-1} = 4(n-1)C_{s-2}^{l-1}$.

- b : utilisant la méthode de construction sur chaque tableau de la forme : $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$ $(g' \neq g)$, on obtient $n(n-1)C^(l)_(s-1)/2$ blocs. Donc pour les l tableaux de la forme $A \cup C_j^{(g')h}$ on a $ln(n-1)C_{s-1}^{l}/2$ blocs et pour les n permutations $(h=1,\dots,n)$, on obtient $ln(n-1)C_l^{s-1}/2$ blocs. En considérant tous les tableaux $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$ pour $g', g = 1,2$, au total on a $ln^2(n-1)C_{s-1}^{l}$ blocs.

1.5. Les plans rectangulaires à angles droits PBIBE$_5$

Soient $v = 2nl$ traitements rangés dans deux tableaux de n lignes et l colonnes chacun. Soit $C_j^{(g)} = \left(a_{1j}^{(g)}, a_{2j}^{(g)}, \dots, a_{nj}^{(g)}\right)'$ la $j^{\text{ème}}$ colonne du $g^{\text{ème}}$ tableau $g \in \{1,2\}$. Appliquant la méthode combinatoire (s) avec s choisi dans $\{3,\dots,l+1\}$ à chaque tableau de le forme $C_j^{(g)h} \cup A^{(g')}$ $(g' \neq g \in \{1,2\})$ pour $j = 1,\dots,l$ et $g \in \{1,2\}$, et considérons uniquement les combinaisons de s traitements contenant une composante de la colonne $C_j^{(g)}$ $g \in \{1,2\})$; l'ensemble de tous les blocs donne un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_5$ à cinq classes associées de paramètres :

$$v = 2nl, \quad b = ln(n-1)C_{s-1}^{l}, \quad r = (n-1)\,[C_{s-1}^{l} + lC_{s-2}^{l-1}], k = 2s,$$
$$\lambda_1 = l(n-1)C_{s-3}^{l-2},$$
$$\lambda_2 = C_{s-1}^{l} + lC_{s-2}^{l-1}, \quad \lambda_3 = lC_{s-3}^{l-2},$$
$$\lambda_4 = 2(n-1)C_{s-2}^{l-1}, \quad \lambda_5 = 2C_{s-2}^{l-1}.$$

Démonstration 6 Identique à la démonstration 5 sauf qu'il n'y pas de permutation sur les composantes des vecteurs $C_j^{(g)}$ $g \in \{1,2\})$ et $j = 1,\dots,l$.

1.6. Les plans rectangulaires à angles droits PBIBE7 :

1.6.1. Première méthode de construction

Soient $v = 2nl$ traitements rangés dans deux tableaux de n lignes et l colonnes chacun. On applique la méthode combinatoire (s) avec s choisi dans $\{2,\dots,l-1\}$ à chaque tableau. On obtient alors deux ensembles de blocs. La juxtaposition des blocs du premier ensemble avec ceux du second ensemble, de telle sorte que les blocs contenant le traitement a_{ij} et $a_{i'j}$ sont placés côte à côte, donne un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_7$ à sept classes associées avec les paramètres suivants :

$v = 2nl, b = \frac{n(n-1)}{2}C_s^l, \quad r = (n-1)C_{s-1}^{l-1} = \lambda_4, \; k = 4s, \; \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2} = \lambda_5$
$\lambda_2 = C_{s-1}^{l-1} = \lambda_6, \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2} = \lambda_7.$

Démonstration 7 Voir la Proposition 4 dans [5].

1.6.2. Deuxième méthode de construction

Soient $v = 2nl$ traitements rangés dans deux tableaux de n lignes et l colonnes chacun. Soient $C_j^{(g)} = \left(a_{1j}^{(g)}, a_{2j}^{(g)}, \dots, a_{nj}^{(g)}\right)'$ la $j^{\text{ème}}$ colonne du $g^{\text{ème}}$ tableau et $R_i^{(g)} = \left(a_{i1}^{(g)}, a_{i2}^{(g)}, \dots, a_{il}^{(g)}\right)$ la i^{eme} ligne du g^{eme} tableau pour $g \in \{1,2\}$. On applique la méthode combinatoire (s) avec s choisi dans $\{3,\dots,l\}$ à chaque tableau de la forme $C_j^{(g)} \cup \left[A^{(g')} \setminus C_j^{(g')}\right]$ $(g' \neq g \in \{1,2\})$ pour $j = 1,\dots,l$ et $g \in \{1,2\}$, on considère uniquement les combinaisons de s traitements contenant une composante de la colonne $C^{(g)h}$. D'autre part, On applique la méthode combinatoire (s) avec le même s à chaque tableau de le forme $R_i^{(g)} \cup \left[A^{(g')} \setminus R_i^{(g')}\right]$ $(g' \neq g \in \{1,2\})$ pour $i = 1,\dots,l$ et $g \in \{1,2\}$, on considère uniquement les combinaisons de s traitements contenants une composante de la ligne $R_i^{(g)}$. L'ensemble de tous les blocs donne un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_7$ à sept classes associées de paramètres suivants :

$$v = 2nl, \quad b = n(n-1)\left[C_{(s-1)l}^{l-1} + 2C_s^l\right],$$
$$r = (n-1)[\,3C_{s-1}^{l-1} + (l-1)C_{s-2}^{l-2}]\,, k = 2s,$$
$$\lambda_1 = 2(n-1)C_{s-2}^{l-2} + (l-2)C_{s-3}^{l-3},$$
$$\lambda_2 = C_{s-1}^{l-1} + (l-1)C_{s-2}^{l-2},$$
$$\lambda_3 = (l-2)C_{s-3}^{l-3}, \quad \lambda_4 = 0,$$
$$\lambda_5 = 2(n-1)C_{s-2}^{l-2}, \quad \lambda_6 = 2C_{s-1}^{l-1},$$
$$\lambda_7 = 4C_{s-2}^{l-2}.$$

Démonstration 8 Voir la Proposition 5 dans [5].

2. Le R-package CombinS

Le R-package CombinS [3] est composé d'une série de fonctions suivantes :

- CombS
- PBIB4
- PBIB5
- PBIB7

3.1. CombS

Les arguments de la fonction CombS sont :

i. n : nombre de lignes du tableau des traitements.

ii. l : nombre de colonnes du tableau des traitements.

iii. s : le nombre de traitements pris de la même ligne du tableau des traitements.

La fonction $CombS$ correspondant à la méthode combinatoire s décrite ci-dessus.

3.1.1. CombS pour les plans rectangulaires

La fonction $CombS$, avec s choisi dans $\{2, \dots, l-1\}$, offre une configuration d'un plan rectangulaire et ses paramètres : v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1,2,3\}$).

3.1.2. CombS pour les plans divisibles en groupes

La fonction $CombS$, avec $s = l$, offre une configuration d'un plan divisible en groupes et ses paramètres : v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1,2\}$).

Exemple 1 : L'exécution de la fonction CombS(3,3,2)

```
> CombS(3,3,2)
$PBIB
     [,1] [,2] [,3] [,4]
init    1    2    4    5
        1    2    7    8
        4    5    7    8
        1    3    4    6
        1    3    7    9
        4    6    7    9
        2    3    5    6
        2    3    8    9
        5    6    8    9

$Type
[1] "Rectangular PBIB design"
$V
[1] 9
$B
[1] 9
$R
[1] 4
$K
[1] 4
$lamda
[1] 4 1
```

2.2. PBIB4

Les arguments de la fonction $PBIB4$ sont :

i. n : nombre de lignes du tableau des traitements.

ii. l : nombre de colonnes du tableau des traitements.

iii. s : le nombre de traitements pris de la même ligne du tableau des traitements.

iv. ty : la méthode utilisée pour obtenir le plan.

2.2.1. PBIB4(n,l,s,ty= ''a'')

La fonction $PBIB4(n, l, s, ty = "a")$ correspond à la méthode de construction de la méthode Combinatoire (s) appliquée à chacun des deux tableaux ($n * l$) .

PBIB4(n,l,s,ty=''a'')pour les plans divisibles en groupes emboités :

La fonction $PBIB4$, avec $s = l$ et $ty = "a"$, offre une configuration d'un plan divisible en groupes emboités et ses paramètres : v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1,2,3\}$).

PBIB4(n,l,s,ty="a") pour les plans rectangulaires à angles droits $PBIB_4$

La fonction PBIB4, avec s choisi dans $\{3, \dots, l-1\}$ et $ty = "a"$, offre une configuration d'un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_4$ et ses paramètres: v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1, \dots, 4\}$).

Exemple 2 L'exécution de la fonction PBIB4(3,3,2)

```
$PBIB
     [,1] [,2] [,3] [,4]
init    1    2    4    5
        1    2    7    8
        4    5    7    8
        1    3    4    6
        1    3    7    9
        4    6    7    9
        2    3    5    6
        2    3    8    9
        5    6    8    9
init   10   11   13   14
       10   11   16   17
       13   14   16   17
       10   12   13   15
       10   12   16   18
       13   15   16   18
       11   12   14   15
       11   12   17   18
       14   15   17   18

$Type
[1] "rectangular right angular PBIB4 design"
$V
[1] 18
$B
[1] 18
$R
[1] 4
$K
[1] 4
$lamda
[1] 2 2 1 0
```

2.2.2. PBIB(n,l,s,ty=''b'')

La fonction $PBIB4(n, l, s, ty = "b")$ correspond à la deuxième méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits $PBIB_4$.

La fonction PBIB4, avec s choisi dans $\{3 \dots, l+1\}$ et $ty = "b"$, offre une configuration d'un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_4$ et ses paramètres: v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1, \dots, 4\}$).

2.3. PBIB5

Les arguments de la fonction PBIB5 sont :

i. n : nombre de lignes du tableau des traitements.

ii. l : nombre de colonnes du tableau des traitements.

iii. s : le nombre de traitements pris de la même ligne du tableau des traitements.

La fonction $PBIB5$ correspond à la méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits $PBIB_5$.
La fonction $PBIB5$, avec s choisi dans $\{3, \ldots, l+1\}$, offre une configuration d'un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_5$ et ses paramètres: v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1, \ldots, 5\}$).
Exemple 3 l'exécution de la fonction $PBIB5$

```
> PBIB5(3,3,2)
$PBIB
      [,1] [,2] [,3] [,4]
init    1   10    4   13
        1   10    7   16
        4   13    7   16
        1   11    4   14
        1   11    7   17
        4   14    7   17
        1   12    4   15
        1   12    7   18
        4   15    7   18
init    2   10    5   13
        2   10    8   16
        5   13    8   16
        2   11    5   14
        2   11    8   17
        5   14    8   17
        2   12    5   15
        2   12    8   18
        5   15    8   18
init    3   10    6   13
        3   10    9   16
        6   13    9   16
        3   11    6   14
        3   11    9   17
        6   14    9   17
        3   12    6   15
        3   12    9   18
        6   15    9   18
init   10    1   13    4
       10    1   16    7
       13    4   16    7
       10    2   13    5
       10    2   16    8
       13    5   16    8
       10    3   13    6
       10    3   16    9
       13    6   16    9
init   11    1   14    4
       11    1   17    7
       14    4   17    7
       11    2   14    5
       11    2   17    8
       14    5   17    8
       11    3   14    6
       11    3   17    9
       14    6   17    9
init   12    1   15    4
       12    1   18    7
       15    4   18    7
       12    2   15    5
       12    2   18    8
       15    5   18    8
       12    3   15    6
       12    3   18    9
       15    6   18    9

$Type
[1] "Rectangular right angular PBIB5 design"
$V
[1] 18
$B
[1] 54
$R
[1] 12
$K
[1] 4
$lamda
[1] 0 6 0 4 2
```

3.4. PBIB7

Les arguments de la fonction $PBIB7$ sont :

i. n : nombre de lignes du tableau des traitements.
ii. l : nombre de colonnes du tableau des traitements.
iii. s : le nombre de traitements pris de la même ligne du tableau des traitements.
iv. ty : la méthode utilisée pour obtenir le plan.

3.4.1. PBIB7(n,l,s,ty="a")

La fonction PBIB7(n,l,s,ty="a") correspond à la première méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits $PBIB_7$.
La fonction $PBIB7$, avec s choisi dans $\{3, \ldots, l-1\}$, offre une configuration d'un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_7$ et ses paramètres : v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1, \ldots, 7\}$).

3.4.2. PBIB7(n,l,s,ty="b")

La fonction PBIB7(n,l,s,ty="b") correspond à la deuxième méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits $PBIB_7$.
La fonction $PBIB7$, avec s choisi dans $\{3, \ldots, l-1\}$ et $ty = "b"$, offre une configuration d'un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_7$ et ses paramètres: v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1, \ldots, 7\}$).

CONCLUSION

Dans notre papier, nous avons décrit quelques méthodes de construction de plans en blocs incomplets équilibrés à $2, \ldots, 5$ *et* 7 classes associées directement à partir de leurs schémas d'association et la "Méthode Combinatoire (s)". Par ailleurs, nous avons reformulé ces méthodes sous forme de fonctions d'un R- package "CombinS " [6] donnant leur configuration et rendant ainsi accessible leur usage à tout utilisateur. Les plans obtenus peuvent servir à la construction de nouveaux plans numériques.

REFERENCES

[1] Fang K.T., Ge G. N., Liu M. (2004), Construction of uniform designs via super-simple resolvable t-designs, Utilitas Mathematica, 66, 15-32.

[2] Rezgui I. and Gheribi-Aoulmi Z. (2014), New Construction Method of Rectangular PBIB Designs and Singular Group Divisible Designs, Journal of Mathematics and Statistics, 10, 45-48.

[3] Bhagwandas, Sinha, K. and Kageyama, S. (1992), Constructions of PBIB designs based on nested group divisible association schemes. Utilitas Mathematica, 41, 169-174.

[4] Vartak M.N., (1955), On an application of Kronecker product of Matrices to Statistical designs, Ann. Math. Stat., 26, 420-438.

[5] Rezgui I. , Gheribi-Aoulmi Z. and Monod H. (2013), New association schemes with 4, 5 and 7 associate classes and their associated partially balanced incomplete block designs, Advances and Applications in Discrete Mathematics, 12, 207 - 215.

[6] Laib M., Rezgui I., Gheribi-Aoulmi Z. and Monod H. (2013), CombinS. R package version 1.0. http://CRAN.R-project.org/package=